

Принятие решений на основе мультипликативного метода анализа иерархий с использованием функций ценности

В.А. Шакиров
Факультет энергетики и автоматики
Братский государственный университет
Братск, Россия
e-mail: mynovember@mail.ru

Аннотация¹

Рассматриваются этапы оригинального мультипликативного метода анализа иерархий. Проводится анализ необходимого для использования метода числа запросов к лицу, принимающему решения. Предлагается модификация метода, направленная на снижение числа запросов к лицу, принимающему решения, и учет его предпочтений, выраженных с помощью функций ценности. Предложенная модификация метода аналитической иерархии позволяет без существенного увеличения числа запросов к лицу, принимающему решения, учесть неопределенность его предпочтений. Эта возможность может быть реализована при построении интервальных или нечетких функций ценности. Рассматриваются особенности такого подхода.

1. Введение

Метод аналитической иерархии (Analytic Hierarchy Process – АНР) разработан в 1980 г. Т. Саати [1]. К настоящему времени АНР стал одним из наиболее известных методов принятия решений, получил широкую апробацию, реализован в виде многочисленных систем поддержки принятия решений [1]. Распространению АНР способствовали удобство для лица, принимающего решения (ЛПР), парных сравнений альтернатив и критериев, отсутствие необходимости назначения абсолютных оценок альтернативам. В то же время, метод имеет ограничение на число критериев и альтернатив при принятии решений, связанное с ростом запросов к ЛПР и проблемой согласованности его ответов. Выражение, по которому можно оценить число запросов для принятия решения в зависимости от числа критериев и альтернатив методом АНР, имеет вид:

$$R = \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right) + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} \right) n. \quad (1)$$

где n – число критериев; m – число альтернатив.

Уже при 5 критериях и 5 альтернативах число запросов к ЛПР составляет 60, а при 7 критериях и 7 альтернативах – 168. В этой связи многими исследователями были предложены подходы к снижению числа запросов к ЛПР. В работе [2] предложена методика снижения числа парных сравнений путем неполного заполнения матриц парных сравнений. Основой подхода является допущение случаев, когда ЛПР не может выразить свои предпочтения по некоторым альтернативам. В исследовании [3] предлагался подход, в основе которого лежало закрепление отдельных частей иерархии за различными респондентами, с учетом того, что люди, которые проводят большое количество сравнений, становятся менее последовательными. Т. Саати для снижения числа запросов к ЛПР предложил подход, основанный на формировании кластеров альтернатив [1, 4]. В работе [5] предложен способ построения матриц парных сравнений альтернатив по критерию на основе элементов первой строки. Автором в работах [6, 7] предложен подход, основанный на использовании однокритериальных функций ценности для выявления предпочтения в отношении альтернатив и заполнения матриц парных сравнений.

Метод АНР подвергается критике за невыполнение свойства сохранения ранжирования при изменении состава альтернатив (проблема rank reversal [5, 8-12]), за использование допущения о возможности проводить нормализацию приоритетов альтернатив по каждому из критериев в отдельности вне связи с приоритетами самих критериев [13, 14].

Указанных проблем можно избежать при использовании мультипликативного АНР, предложенного Ф. Лутсмой [9, 15, 16]. Рассмотрим этапы оригинального мультипликативного метода анализа иерархий и модификацию метода, направленную на снижение числа запросов к ЛПР, и учет его предпочтений, выраженных с помощью функций ценности.

Труды Шестой всероссийской научной конференции "Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений", 28-31 мая, Уфа-Ставрополь, Россия, 2018

2. Этапы мультипликативного метода анализа иерархий

В основе метода лежат психофизические особенности человека при проведении им сравнений. Так, результаты экспериментов показывают, что связь между субъективными измерениями двух стимулов и отношениями самих стимулов может быть представлена универсальным степенным законом [17]:

$$f(S_1) / f(S_2) = (S_1 / S_2)^\beta. \quad (2)$$

где S_1, S_2 – стимулы; $f(S_1), f(S_2)$ – субъективные измерения стимулов; β – положительная постоянная. С учетом этих особенностей, Ф. Лутсма предложил проводить построение шкалы для субъективного измерения различных факторов [17]. Диапазон оценок по критерию $[C_{min}, C_{max}]$ может быть разбит на несколько интервалов (категорий), определяющих существенные для человека различия в уровнях оценок. Границы интервалов могут быть определены степенями $C_{min}+t_0, C_{min}+t_1$ и т.д. Известный в психофизике закон Вебера утверждает, что субъективное расстояние между двумя стимулами пропорционально величине стимула [17]. На основании этого утверждения в [18] было получено:

$$t_\mu = (1+\varepsilon)^\mu \cdot t_0, \quad (3)$$

$$t_\mu = e^{\gamma\mu} \cdot t_0, \quad (4)$$

где t_μ – субъективное восприятие различных категорий; ε – постоянная; μ – целочисленный параметр, определяющий номер интервала шкалы; $\gamma = \ln(1+\varepsilon)$ – фактор геометрической прогрессии. Так в [18] было предложено формировать шкалу с геометрической прогрессией. Число категорий, на которые может быть разбита шкала, достаточно мало в связи с ограниченностью лингвистического потенциала человека для описания категорий в словесных терминах. Возможные названия категорий представлены в таблице 1.

Таблица 1– Вербальная шкала оценок по критерию

Интервал оценок по критерию	Вербальная оценка
$[C_{min}; C_{min}+t_0]$	крайне низкие оценки по критерию;
$[C_{min}+t_0; C_{min}+t_1]$	очень низкие оценки по критерию;
$[C_{min}+t_1; C_{min}+t_2]$	низкие оценки по критерию;
$[C_{min}+t_2; C_{min}+t_3]$	оценки по критерию ниже среднего;
$[C_{min}+t_3; C_{min}+t_4]$	средние оценки по критерию;
$[C_{min}+t_4; C_{min}+t_5]$	оценки по критерию выше среднего;
$[C_{min}+t_5; C_{min}+t_6]$	высокие оценки по критерию;
$[C_{min}+t_6; C_{min}+t_7]$	очень высокие оценки по критерию;
$[C_{min}+t_7; C_{min}+t_8]$	крайне высокие оценки по критерию;

На рис. 1 представлен график, отражающий связь между порядком категории и оценками по критерию.

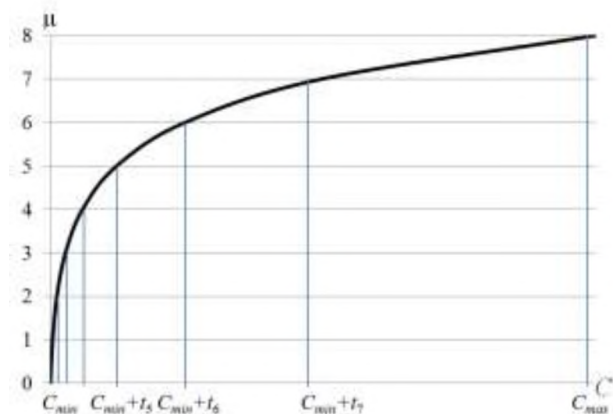


Рис. 1. Разбиение диапазона оценок по критерию на 8 интервалов (для ЛПР предпочтительны меньшие значения C)

Величина μ может быть определена по выражению [18]:

$$\begin{cases} \mu = \log_2 \left(\frac{C - C_{min}}{C_{max} - C_{min}} \cdot 2^M \right), v(C_{min}) > v(C_{max}) \\ \mu = \log_2 \left(\frac{C_{max} - C}{C_{max} - C_{min}} \cdot 2^M \right), v(C_{max}) > v(C_{min}) \end{cases}, \quad (5)$$

где M – число категорий; $v(C_{min}), v(C_{max})$ – ценность для ЛПР максимальной и минимальной оценок по критерию.

После разбиения интервала оценок по критерию на категории может быть произведен переход к получению шкалы относительной важности оценок. Так, согласно [18]:

$$\frac{S_i}{S_j} = \frac{t_{ij}}{t_{ji}} = e^{\gamma(\mu_j - \mu_i)} = e^{\gamma\delta_{ij}}, \quad (6)$$

где $\delta_{ij} = \mu_j - \mu_i$ – параметр, определяющий оценку шкалы относительной важности альтернатив (таблица 2)

Таблица 2 – Оценка сравнительной предпочтительности

Оценка	Градация предпочтительности
8	Очень сильное превосходство i -го элемента над j -м элементом
6	Сильное превосходство i -го элемента над j -м элементом
4	Определенное превосходство i -го элемента над j -м элементом
2	Слабое превосходство i -го элемента над j -м элементом
0	Безразличие между i -м и j -м элементами
-2	Слабое превосходство j -го элемента над i -м элементом
-4	Определенное превосходство j -го элемента над i -м элементом
-6	Сильное превосходство j -го элемента над i -м элементом
-8	Очень сильное превосходство j -го

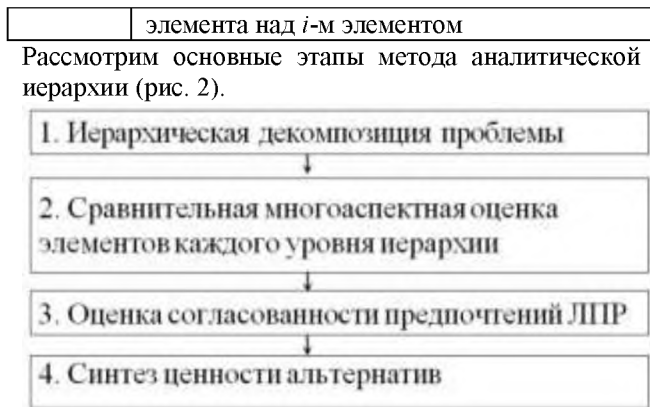


Рис. 2. Этапы метода АНР

Иерархическая декомпозиция, осуществляемая на первом этапе, состоит в структуризации проблемы и выделении базовых элементов проблемы путем последовательного перехода от более общих и, как правило, слабо формализованных уровней иерархии к более частным и конкретным уровням [19]. В качестве базового элемента верхнего уровня выступает цель F , выражающая содержание проблемы, которая формально состоит в упорядочении вариантов решения по их общей ценности [19]. Базовыми элементами нижнего уровня являются имеющиеся варианты $A_1, \dots, A_m$ [19]. Базовыми элементами средних уровней служат различные критерии $K_1, \dots, K_n$, которые характеризуют цели и варианты [19]. Критерии обеспечивают взаимную связь между элементами верхнего и нижнего уровней иерархии. Сами критерии также могут образовывать некоторую последовательно детализируемую иерархическую структуру [19].

На втором этапе осуществляется сравнительная оценка важности всех базовых элементов иерархической структуры по отношению к вышележащему уровню [19]. Оценка относительной важности элементов иерархии осуществляется путем их попарного сравнения по каждому k -му аспекту более высокого уровня и заполнения матриц парных сравнений $A^k = (a_{ij}^k)_{n \times n}$, n – число сравниваемых базовых элементов на рассматриваемом уровне иерархии [19]. Для измерения предпочтений ЛПР используется шкала отношений (таблица 2), с помощью словесной шкалы определяются элементы матрицы парных сравнений a_{ij}^k [19]:

$$a_{ij}^k = e^{\gamma^k \delta_{ij}^k} \quad (7)$$

где γ^k – параметр шкалы; δ_{ij}^k – числовая оценка вербальной градации сравнительной предпочтительности i -го и j -го элементов одного уровня.

Аналогично заполняется матрица парных сравнений критериев.

Следует отметить, что в работах [2, 3] при заполнении матриц парных сравнений альтернатив

рекомендован параметр шкалы $\gamma^v = \ln 2$, а при заполнении матриц парных сравнений критериев – $\gamma^o = 0,5 \ln 2$.

Частная ценность варианта A_i и сравнительная важность q -го критерия K_q определяются соответственно выражениями [19]:

$$v_i^q = v^q(A_i) = \left(\prod_{j=1}^m a_{ij}^q \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\prod_{j=1}^m e^{\gamma^q \delta_{ij}^q} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (8)$$

$$\omega_q = \omega(K_q) = \left(\prod_{l=1}^n a_{ql} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{l=1}^n e^{\gamma^o \omega_{ql}} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (9)$$

Третий этап при использовании мультипликативной версии метода аналитической иерархии не требуется [19].

На четвертом этапе определяется общая ценность $v(A_i)$ варианта A_i путем мультипликативной свертки частных ценностей по всем уровням иерархии [19]:

$$v(A_i) = \prod_{q=1}^n \left[v_i^q(A_i) \right]^{\omega_q} \quad (10)$$

3. Модификация мультипликативного метода анализа иерархий

Перейдем к анализу числа запросов к ЛПР при использовании мультипликативного метода аналитической иерархии.

Одним из подходов для снижения числа запросов к ЛПР был изложен в работе [20]. При принятии допущений (2), (3) могут быть получены сравнительные оценки по критериям с количественным измерением с помощью выражений (5) без привлечения ЛПР. В работе [20] проводится сравнение результатов такого подхода с решением, полученным при использовании подхода МАУТ в исследовании [21]. Несмотря на близкие результаты сравнения, ранжирование альтернатив отличается. Это связано с тем, что в подходе МАУТ выявляются индивидуальные особенности предпочтений ЛПР. В частности, одним из этапов МАУТ является построение функций полезности или ценности, которые отражают в первом случае отношение ЛПР к риску, а во втором случае – к ценности альтернатив, в зависимости от абсолютной оценки по критерию. В подходе мультипликативного АНР при использовании выражений (5) рассматривается единая модель предпочтений ЛПР, построенная на допущениях (2) и (3) об особенностях человека при проведении им сравнений.

Автором предлагается дополнить мультипликативный метод аналитической иерархии процедурой построения однокритериальных функций ценности. Это позволит получить информацию об индивидуальных предпочтениях ЛПР в отношении ценности оценок альтернатив. Используя эту информацию, можно с помощью выражений (5) без дополнительных запросов к ЛПР получить оценки частной ценности альтернатив по критериям. Это существенно снижает число запросов к ЛПР, а также

позволяет снизить число запросов к ЛПР при заполнении матриц парных сравнений альтернатив по критериям с качественным описанием.

Модифицированные шаги второго этапа (рис. 2) представлены на рис. 3.

На первом шаге проводится построение однокритериальных функций ценности. От ЛПР на этом шаге требуется $3n$ запросов.



Рис. 3. Предлагаемая методика попарного сравнения альтернатив

Функции ценности могут быть весьма разнообразны, но можно выделить три характерных случая: линейная, выпуклая и вогнутая [22] (рис. 4).

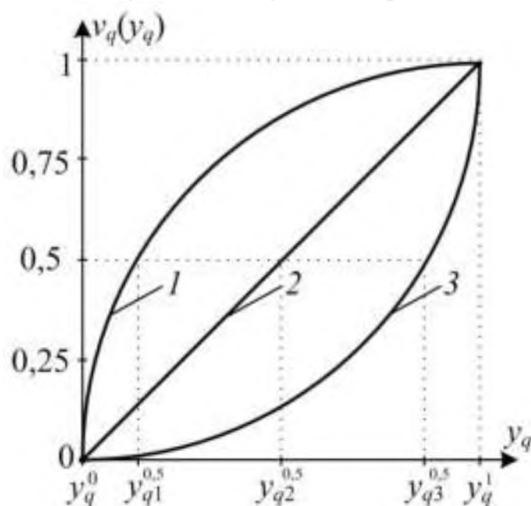


Рис. 4. Три характерных вида функций ценности: 1 – вогнутая; 2 – линейная; 3 – выпуклая

Отличия в предпочтениях при получении трех функций ценности можно сформулировать на примере оценок альтернатив с ценностью 0,5. Так, в случае, если на основе опроса ЛПР получена вогнутая функция ценности, ЛПР готов за улучшение оценки по критерию q от худшей оценки y_q^0 до $y_{q1}^{0,5}$ пожертвовать качеством альтернативы по другим критериям таким же, как за улучшение оценки от $y_{q1}^{0,5}$ до лучшей оценки y_q^1 . Учитывая, что первый

интервал $(y_q^0; y_{q1}^{0,5})$ меньше второго $(y_{q1}^{0,5}; y_q^1)$, можно заключить что для ЛПР улучшение оценок по критерию в начале диапазона их изменения важнее, чем в конце. В случае, если на основе опроса ЛПР получена выпуклая функция ценности, то равноценны переходы от y_q^0 до $y_{q3}^{0,5}$ и от $y_{q3}^{0,5}$ до y_q^1 . Можно заключить что для ЛПР улучшение оценок по

критерию в конце диапазона их изменения важнее, чем в начале. В случае, если на основе опроса ЛПР получена линейная функция ценности, можно заключить что предпочтения ЛПР на всем диапазоне изменения оценок равномерны.

На втором шаге (рис. 3) определяется ценность всех альтернатив по критериям. Особенностью этого шага является корректировка ценности альтернатив с худшими оценками по критериям. Такая необходимость связана с тем, что при разбиении в соответствии с (4) диапазона ценности на категории используется логарифмическое выражение. Соответственно, необходимо, чтобы

$$\frac{C - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}} \cdot 2^M \geq 1. \quad (11)$$

После замены на значения функции ценности:

$$\frac{v_q(y_q^k) - v_q(y_q^0)}{v_q(y_q^1) - v_q(y_q^0)} \geq 2^{-M}, \quad (12)$$

где $v_q(y_q^k)$ – ценность альтернативы с оценкой y_q^k по критерию q .

Условие перестает выполняться при $v_q(y_q^k) \leq 2^{-M}$.

Поэтому предлагается принять ценность альтернатив с более низкими оценками равными 2^{-M} . Учитывая, что M принимается равным 6 или 8 [18, 20], ценность таких альтернатив крайне мала и такое допущение не внесет существенного влияния на окончательные оценки альтернативы.

В результате замены оценок по критерию значениями ценности график зависимости $\mu(C)$ изменится. Характерные случаи представлены на рис. 5.

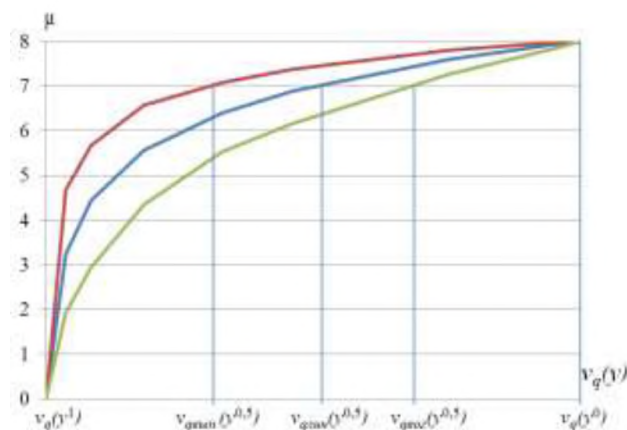


Рис. 5. Разбиение диапазона оценок по критерию на 8 интервалов

На третьем шаге (рис. 3) необходимо оценить сравнительную предпочтительность пар альтернатив. Обратимся к выражению (6):

$$\frac{S_i}{S_j} = \frac{t_{ij}}{t_{ji}} = \frac{v_q(y_q^i) - v_q(y_q^j)}{v_q(y_q^j) - v_q(y_q^i)},$$

С учетом (4):

$$\frac{v_q(y_q^1) - v_q(y_q^j)}{v_q(y_q^1) - v_q(y_q^i)} = \frac{e^{\gamma \mu_j t_0}}{e^{\gamma \mu_i t_0}} = e^{\gamma(\mu_j - \mu_i)},$$

$$\ln \left(\frac{v_q(y_q^1) - v_q(y_q^j)}{v_q(y_q^1) - v_q(y_q^i)} \right) = \gamma \delta_{ij},$$

$$\delta_{ij} = \log_2 \left(\frac{v_q(y_q^1) - v_q(y_q^j)}{v_q(y_q^1) - v_q(y_q^i)} \right). \quad (13)$$

Так как ценность лучшей оценки $y_q^1 = 1$, то:

$$\delta_{ij} = \log_2 \left(\frac{1 - v_q(y_q^j)}{1 - v_q(y_q^i)} \right). \quad (14)$$

При заполнении матриц парных сравнений при использовании функций ценности число запросов составляет:

$$R = \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right) + 3n. \quad (15)$$

Можно отметить, что при числе альтернатив и критериев более трех, эффективным становится применение метода аналитической иерархии с предлагаемой модификацией.

Предложенная модификация метода аналитической иерархии позволяет без существенного увеличения числа запросов к ЛПР учесть неопределенность его предпочтений. Эта возможность может быть реализована при построении функций ценности интервального или нечеткого вида. Учитывая, что после построения функций ценности от ЛПР более не требуется дополнительной информации о его предпочтениях, может быть автоматизирован расчет многокритериальных оценок альтернатив для различных вариантов его предпочтений. Рассмотрим особенности такого подхода.

1. Необходимо учитывать, что оценки, определяемые методом аналитической иерархии – относительные. Поскольку сумма оценок всех альтернатив после нормирования равна 1, увеличение оценки одной альтернативы приводит к однозначному уменьшению одной или нескольких оценок других альтернатив. Поэтому при изменении функции ценности сравнительные оценки альтернатив меняются неоднозначно. Величина сравнительной оценки альтернативы имеет «физический смысл» только в сравнении с оценками других альтернатив при выбранном варианте предпочтений ЛПР. В этой связи целесообразно определять не интервалы изменения многокритериальных оценок при изменении функции ценности, а проводить оценку смены ранжирования альтернатив.

2. При анализе альтернатив с использованием нечетких однокритериальных функций ценности целесообразно воспользоваться разложением нечетких множеств по α -уровням. В этом случае ранжирование, полученное при функциях ценности

со степенью принадлежности $\mu=1$, является наиболее достоверным. Далее может быть проведен анализ возможного изменения ранжирования альтернатив для нескольких $\alpha < 1$. Наибольшее возможное изменение в ранжировании альтернатив может ожидать при $\alpha=0$.

4. Заключение

Предложенная модификация метода мультипликативной аналитической иерархии обладает следующими преимуществами:

- 1) Учет индивидуальных предпочтений ЛПР при сравнении альтернатив по критериям с использованием функций ценности.
- 2) Сниженное число запросов к ЛПР. Независимость числа запросов к ЛПР при заполнении матрицы парных сравнений альтернатив по критерию от количества альтернатив.
- 3) Возможность многокритериальной оценки новых альтернатив без дополнительных запросов к ЛПР, в случае если оценки новых альтернатив не выходят из области определения однокритериальных функций ценности.
- 4) Возможность учета неопределенности предпочтений ЛПР в отношении сравнительной важности альтернатив без существенного увеличения числа запросов к ЛПР.

Список используемых источников

1. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.
2. Harker P.T. Alternative modes of questioning in the analytic hierarchy process // Mathematical Modelling, 1987, Vol. 9, pp. 41–46.
3. Weiss E.N., Rao V.R. AHP design issues for large-scale systems // Decision Science, 1987, Vol. 8, pp. 43–68.
4. Islam R., Biswal M.P., Alam S.S. Clusterization of alternatives in the analytic hierarchy process // Military Operations Research, Vol. 3, 1997, No. 1, pp.69–78.
5. Ногин В.Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. № 7. – С. 1261.
6. Шакиров В.А., Панкратьев П.С. Выбор пункта строительства электростанции в условиях риска методом анализа иерархий // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2014. – № 4 (44). – С. 141-147.
7. Шакиров В.А., Панкратьев П.С. Поддержка принятия решений на стадии предпроектных исследований на основе двухуровневого многокритериального анализа // Прикладная информатика. – 2013. – № 6 (48). – С. 111-121.

8. Belton V., Gear T. On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies // *Omega*, 1983, Vol. 11, pp. 228 – 230.
9. Triantaphyllou E. Two New Cases of Rank Reversals when the AHP and Some of its Additive Variants are Used that do not Occur with the Multiplicative AHP // *Journal Of Multi-Criteria Decision Analysis*, 2001, Vol. 10, pp. 11–25.
10. Saaty T.L. Axiomatic foundations of the analytic hierarchy process // *Management Science*, 1983, Vol. 32, pp. 841–855.
11. Saaty T.L. Rank generation, preservation, and reversal in the analytic hierarchy process // *Decision Sciences*, 1987, Vol. 18, pp. 157–177.
12. Dyer J.S. Remarks on the analytic hierarchy process // *Management Science*, 1990, Vol. 36, pp. 249–258.
13. Подиновский В.В., Подиновская О.В. О некорректности метода анализа иерархий // *Проблемы управления*. – 2011. – № 1. – С. 8-13.
14. Подиновский В.В., Подиновская О.В. Ещё раз о некорректности метода анализа иерархий // *Проблемы управления*. – 2012. – № 4. – С. 75-78.
15. Lootsma F.A. Scale Sensitivity in the Multiplicative AHP and SMART // *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 1993, Vol. 2, pp. 87–110.
16. Wang X., Triantaphyllou E. Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods // 2008, *Omega* Vol. 36, No. 1, pp. 45-63.
17. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах / Ларичев О.И. – Изд. второе, перераб. и доп. – М.: Логос, 2002. – 392 с.
18. Lootsma F.A. Scale Sensitivity in the Multiplicative AHP and SMART // *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 1993, Vol. 2, pp. 87-110
19. Теория принятия решений: учебник для студ. высш. учеб. заведений /А.Б. Петровский. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 400 с.
20. Lootsma F.A. Context-related scaling of human judgement in the multiplicative AHP, SMART and Electre. Report 93–38, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1993, 21 p.
21. Keeney R.L., Nair K. Evaluating Potential Nuclear Power Plant Sites in the Pacific Northwest using Decision Analysis. In D.E. Bell, R.L. Keeney, H. Raiffa. *Conflicting Objectives in Decisions*. IIASA, Laxenburg, Austria, 1977, Chapter 14, 44 p.
22. Принятие решений при многих критериях. Предпочтения и замещения. / Кини Р. Л., Райфа Х. – Пер. с англ. Под ред. И.Ф. Шахнова. – М. Радио и связь, 1981. – 560 с.